Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem
(On the foundations of set theory and the continuum problem)
by Julius König, Mathematische Annalen 61, no. 1 (1905): 156-160.

Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem.

Von

JULIUS KÖNIG in Budapest.

Nach schweren Bedenken entschließe ich mich, das Folgende der Öffentlichkeit zu übergeben. Welche Aufnahme immer die darin enthaltene Auffassung finden möge, so glaube ich doch, daß die angeregten Fragen in der weiteren Entwicklung der Mengenlehre nicht übergangen werden können.

Daß das Wort „Menge" promiscue für ganz verschiedene Begriffe verwendet wird, und hieraus die scheinbaren Paradoxien dieses jungen Wissenschaftszweiges entstehen; daß ferner auch die Mengenlehre, wie jede exakte Wissenschaft, der axiomatischen Annahmen nicht entbehren kann, und daß für diese, wenn sie auch hier viel tiefer liegen, ebenso wie in anderen Disziplinen eine gewisse Willkürlichkeit vorhanden ist: — das alles will ich nicht als neu hinstellen. Doch glaube ich, in bezug auf diese Fragen auch in dieser fragmentarischen, vorläufigen Mitteilung neue Gesichtspunkte zu bieten. Insbesondere kann wohl die *spezielle* Theorie der wohlgeordneten Mengen nicht als vollständig begründet angesehen werden, solange die unter 4. behandelten Fragen nicht geklärt sind.

1. Ist $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ eine abzählbar unendliche Reihe positiver ganzer Zahlen (vom Typus ω), so sollen die Dinge

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots)$$

die als „Kontinuum" bezeichnete Menge definieren. Ist man von einer anderen Definition des Kontinuums ausgegangen, so sind die $(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$ Symbole, die die Elemente des Kontinuums einerseits eindeutig bestimmen, andererseits voneinander genau unterscheiden.

Ein Element des Kontinuums soll „endlich definiert" heißen, wenn wir mit Hilfe einer zur Fixierung unseres wissenschaftlichen Denkens geeigneten Sprache in endlicher Zeit ein Verfahren (Gesetz) angeben können, das jenes Element des Kontinuums von jedem anderen begrifflich sondert, oder — anders ausgedrückt — für ein beliebig gewähltes k die Existenz einer und nur einer zugehörigen Zahl a_k ergibt.

Dabei muß aber ausdrücklich betont werden, daß die hierin geforderte „endliche" begriffliche Sonderung nicht mit der Forderung eines wohl-definierten oder gar endlichen Verfahrens zur Bestimmung der a_k verwechselt werden darf.

Man zeigt sehr leicht, daß *die endlich definierten Elemente des Kontinuums eine Teilmenge des Kontinuums von der Mächtigkeit* $\aleph_0$ *bestimmen*, die wir weiterhin mit E bezeichnen wollen.

Eine solche endliche Definition muß nämlich durch eine endliche Zahl von Buchstaben und Interpunktionszeichen, die selbst nur in bestimmter, endlicher Zahl vorhanden sind, vollständig gegeben sein. Man kann weiter jene verschiedenen endlichen Definitionen wieder so anordnen, daß jeder beliebigen Definition eine und nur eine bestimmte positive ganze Zahl als (endliche) Ordnungszahl entspricht.

Jedes endlich definierte Element des Kontinuums bestimmt, da ja für ein solches Element verschiedene „endliche" Definitionen existieren können und auch wirklich vorhanden sind, eine Reihe von positiven ganzen Zahlen, unter denen demnach die kleinste eindeutig bestimmt ist, und die wieder — durch die zugehörige Zeichenkombination — das betreffende endlich definierte Element des Kontinuums eindeutig bestimmt.

E ist daher einer Teilmenge der aus den positiven ganzen Zahlen bestehenden Menge äquivalent. Da aber

$$(a, a, \cdots, a, \cdots),$$

wo a eine beliebige positive ganze Zahl sein kann, ein endlich definiertes Element des Kontinuums ist, folgt hieraus weiter:

$$\mathfrak{e} = \aleph_0,$$

wenn wir die Mächtigkeit von E mit $\mathfrak{e}$ bezeichnen.

Da aber das Kontinuum seiner Definition nach nicht abzählbar ist, muß es Elemente des Kontinuums geben, die nicht endlich definiert sein können.

2. Wenn ich im Augenblick auch noch darauf verzichten muß, eine genaue und systematische Darstellung zu geben, ist es doch unbedingt notwendig, die in dem bisherigen Gedankengange enthaltenen axiomatischen Annahmen zu präzisieren.

a) Es wird vor allem die „Tatsache" angenommen, daß es in unserem Bewußtsein sich abspielende Prozesse gibt, die den formalen Gesetzen der Logik genügen und als „wissenschaftliches Denken" bezeichnet werden, und daß es unter diesen auch solche gibt, die mit anderen ebensolchen Prozessen, der Erzeugung jener früher beschriebenen Zeichenfolgen, in gegenseitig eindeutiger Beziehung stehen.

Die Frage, „wie" diese Beziehung zustande kommt, oder gar „wie weit" diese Beziehungen erstreckt werden können, wird dabei gar nicht berührt. (*Metalogisches Axiom.*)

b) Jede „beliebige" aus positiven ganzen Zahlen gebildete Folge vom Typus ω und der „Inbegriff aller dieser Folgen", den wir „Kontinuum" nennen, sind „mögliche Begriffe", d. h. solche, die an sich zu keinem logischen Widerspruche führen. (*Kontinuum-Axiom.*)

Eine weitere gründliche Analyse dieser Behauptung ist — wie ich glaube — in jenen Entwicklungen enthalten, die Herr Hilbert dem III. Internationalen Mathematiker-Kongresse in Heidelberg vorgetragen hat. (Kongr.-Verh. pag. 174.)

Insbesondere enthält diese Definition des Kontinuums die Behauptung, daß dessen Mächtigkeit" $\aleph_0^{\aleph_0}$ ist.

Daß weiter dann $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$ ist, kann z. B. nach der in meiner Note „Zum Kontinuumproblem", Math. Ann. Bd. 60, p. 177, gegebenen Methode bewiesen werden.

Ich stelle mich damit in bewußten Gegensatz zu der Annahme, daß es *nicht* gestattet ist, über „endliche Gesetze" hinauszugehen. Mit dieser Annahme wird meiner Ansicht nach die Existenz des Kontinuums und des Kontinuumproblems geleugnet. Die hier benützte Annahme ist im Gegenteil die, daß es Elemente des Kontinuums gibt, die wir nicht „zu Ende denken" können, und die „trotzdem" widerspruchsfrei, also, wenn der Ausdruck in allerdings ganz neuem Sinne gestattet ist, „ideale" Elemente sind.

c) Wenn wir nun nach den bisherigen Annahmen von einem „beliebigen" Elemente des Kontinuums sprechen dürfen, benützen wir endlich die *logische Antithese*: „Ein beliebiges Element des Kontinuums ist entweder endlich definiert oder dies ist nicht der Fall." Nach a) und b) kann wohl diese Antithese nicht zurückgewiesen werden, um so weniger, da diese, ohne unsere Schlüsse zu ändern, auch subjektiv gefaßt werden kann: „Für ein beliebiges Element des Kontinuums ist eine endliche Definition sicher vorhanden, oder dies ist nicht der Fall."

3. Die bisher entwickelten Annahmen führen in merkwürdig einfacher Weise zu dem Schlusse, daß *das Kontinuum nicht wohlgeordnet werden kann.*

Denken wir die Elemente des Kontinuums als wohlgeordnete Menge, so bilden jene Elemente, die nicht endlich definiert werden können, eine Teilmenge jener wohlgeordneten Menge, die gewiß Elemente des Kontinuums enthält. Diese Teilmenge ist aber dann auch wohlgeordnet, und enthält ein und nur ein erstes Element. Man beachte ferner, daß nach den jetzt gültigen Annahmen das Kontinuum, wie jede wohlgeordnete Menge, eine lückenlose Folge bestimmter Ordnungszahlen definiert;, und zwar in der Weise, daß jedem Elemente des Kontinuums eine und nur eine solche Ordnungszahl entspricht, wie auch umgekehrt. Es ist demnach „die einem endlich definierten Elemente des Kontinuums entsprechende Ordnungszahl", sowie auch „das einer endlich definierten solchen Ordnungszahl entsprechende Element des Kontinuums" endlich definiert. Es müßte demnach in jener Folge eine erste nicht endlich definierbare Ordnungszahl vorhanden sein. Dies ist aber unmöglich.

Es gibt nämlich eine bestimmte (wohlgeordnete) Menge endlich definierter Ordnungszahlen, die von der ersten ab lückenlos aufeinander folgen. „Die der Größe nach auf alle diese zunächst folgende Ordnungszahl“ wäre aber durch das Gesagte eben endlich definiert, während sie doch — der Annahme nach — nicht endlich definiert werden kann.

Die Annahme, daß das Kontinuum wohlgeordnet werden kann, hat demnach zu einem Widerspruch geführt.

4. Gegen die Richtigkeit der bisherigen Ausführungen erhebt sich beinahe unmittelbar der Einwand, daß dieselben ja Wort für Wort auf jede wohlgeordnete und nicht abzählbare Menge angewendet werden können, daß also solche Mengen überhaupt nicht existieren könnten. Da aber Cantors zweite Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ — „die Gesamtheit aller Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen von der Kardinalzahl $\aleph_0$“ — widerspruchslos eine solche „Menge“ definiert, muß in den bisherigen Schlüssen ein Denkfehler untergelaufen sein. Daß ein solcher Denkfehler aus diesem paradox scheinenden Resultate nicht folgen *muß*, soll noch ausführlicher auseinander gesetzt werden.

Das Wort „Menge“ wird in den beiden Fällen für zwei total verschiedene Begriffe gebraucht.

Bei der Bildung des Kontinuumbegriffes ist die „beliebige“ Folge $(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$ das Primäre, Ursprüngliche. Aus dieser wird durch die Forderung, $a_1, a_2, \cdots$ durch bestimmte positive ganze Zahlen zu ersetzen, eine „bestimmte“ Folge, ein Element des Kontinuums, das wir also, wenn überhaupt, auch von jedem anderen Elemente begrifflich gesondert denken. Die weitere Forderung, den *Inbegriff* dieser „wohlunterschiedenen“ Objekte zu denken, führt dann zum Kontinuum.

Ganz anders steht die Sache bei der Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$. Ihre „Elemente“ werden durch die „Eigenschaft“, Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_0$ zu sein, bestimmt. Allerdings kennen wir solche Elemente: ω, $\omega + 1, \cdots$; aber jene Eigenschaft ist nur eine Abstraktion, im besten Falle ein Mittel zur Unterscheidung zwischen in die Klasse gehörigen und anderen Dingen; gewiß aber keine Anweisung, nach der *jedes* Element von $Z(\aleph_0)$ gebildet werden kann. Hier ist das Primäre, Ursprüngliche der Kollektivbegriff, den ich — im Anschluß an Cantors Namengebung — eben deshalb gar nicht als „Menge“, sondern als „Klasse“ bezeichnen möchte; und erst aus diesem heraus werden *dann* der Klasse angehörende Elemente konstruiert.

Daß die zweite Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ als „fertige“ Menge wohlunterschiedener, d. i. begrifflich durchweg gesonderter Elemente definierbar ist, kann auch nach dem bisherigen Stande unserer mengentheoretischen Kenntnisse nicht als wahrscheinlich bezeichnet werden. Insofern die früher entwickelten Schlüsse richtig sind, wäre in dieser Darstellung sogar der Beweis enthalten, daß die zweite Zahlenklasse nicht als fertige Menge, d. i. als Inbegriff wohlunterschiedener, durchweg begrifflich gesonderter Elemente gedacht werden kann*).

Indem ich diese fragmentarischen Auseinandersetzungen schließe, gereicht es mir zur Genugtuung, konstatieren zu können, daß diese trotz ihres teilweise oppositionellen Charakters, soweit sie richtig sein mögen, nur den hohen Wert der genialen Cantorschen Schöpfung in neues Licht setzen. Die Opposition richtet sich nur gegen gewisse Vermutungen Cantors; der Inhalt der von ihm bewiesenen Sätze bleibt vollständig intakt. Ich bemerke noch endlich, daß die hier gegebene Unterscheidung zwischen „Menge" und „Klasse" die genannten Paradoxien („Menge aller Mengen" usw.) vollständig klärt.

Das Wesen des Vorstehenden habe ich in der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 20. Juni 1905 vorgetragen.

---

*) In dieser Tatsache liegt, wie ich glaube, der Ursprung jener Paradoxien in der Theorie der Ordnungszahlen, auf die zuerst Herr Burali-Forti aufmerksam gemacht hat.

Ich möchte hier noch einige kurze Bemerkungen hinzufügen, die das Verständnis der Ausführungen unter 4. vielleicht erleichtern.

Auch der Inbegriff der positiven ganzen Zahlen ist ursprünglich nur als „Klasse" gegeben. So definiert auch Herr Hilbert a. a. O. das „kleinste Unendlich". Doch scheint es, daß die Forderung, *diese* Klasse als fertige Menge zu denken, möglich, d. h. an sich widerspruchslos ist.

Hingegen wäre das Kontinuum nur als „fertige Menge", die zweite Zahlenklasse nur als Klasse oder (vielleicht ist der Ausdruck gestattet) „werdende Menge" denkbar.

Ich will noch auf einen sehr elementaren Kollektivbegriff hinweisen, der die Auffassung als „fertige Menge" gewiß *nicht* gestattet.

Wir gehen von der Gesamtheit aller endlichen Dezimalbrüche aus, die wir aber als unendliche Dezimalbrüche schreiben, indem wir an die unbesetzten Stellen überall die Ziffer 0 setzen.

Jede Stelle ist in diesen Gebilden frei besetzbar, d. h. wir können statt irgend einer Ziffer irgend eine andere Ziffer setzen, ohne aus der Gesamtheit der definierten Gebilde herauszutreten.

Trotzdem wäre es völlig unstatthaft, von einem Inbegriff aller Stellen als frei besetzbarer Stellen zu sprechen, offenbar wäre damit das in der Definition der frei besetzbaren Stellen enthaltene „Hemmungsprinzip" eliminiert. Dieses Hemmungsprinzip kann folgendermaßen gefaßt werden: „Die k^{te} Stelle kann frei besetzt werden, es muß aber eine positive ganze Zahl $l > k$ geben, so daß von der l^{ten} Stelle ab nur die Ziffer Null zur Verwendung gelangt."

Die Frage: „wieviel zugleich frei besetzbare Stellen gibt es?" kann durch keine Kardinalzahl (im Sinne Cantors) beantwortet werden und fordert die Schöpfung eines neuen „Zählbegriffs".